À propos des incertitudes

Vocabulaire de base

► La grandeur à mesurer est le **mesurande**.

► Le procédé de détermination d'une valeur expérimentale est le **mesurage** (on dit souvent "mesure", par abus toléré de langage...).

► La valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait est la **valeur vraie**.

► La valeur que l'on obtiendrait en effectuant un grand nombre de mesurages est la **valeur moyenne**.

► L'écart entre le résultat d'un mesurage et la valeur vraie est l'**erreur de mesure**. Elle comprend *a priori* :

∘ un terme **aléatoire** = écart entre la mesure et la valeur moyenne, dû à des variations non prévisibles des grandeurs d'influence ; il peut souvent être réduit en augmentant le nombre d'observations

∘ un terme **systématique** = écart entre la valeur moyenne et la valeur vraie, lié à une procédure inadaptée, un appareil défectueux, un oubli d'un paramètre... ; elle peut être atténuée par l'application d'une correction.

► Si l'erreur systématique est faible, on dit que le mesurage est *juste*.

► Si l'erreur aléatoire est faible, on dit que le mesurage est *fidèle*.

Dans tout ce qui suit, on suppose que l'erreur systématique a été corrigée autant que possible, et on s'intéresse à l'erreur aléatoire.

Incertitudes

► On évalue dans un premier temps une **incertitude-type** $u(x)$ sur la valeur estimée :

∘ on parle d'*évaluation de type A* lorsqu'on dispose de nombreuses mesures et que l'on procède à un traitement statistique

∘ on parle d'*évaluation de type B* lorsqu'on dispose d'une seule mesure et que l'on procède à une estimation probabiliste.

► On détermine ensuite l'**incertitude élargie** Δx, en général définie pour un niveau de confiance à 95%.

► On fournit le résultat sous la forme $\boxed{x \pm \Delta x}$, avec x la **mesure** de la grandeur étudiée.

► $\dfrac{\Delta x}{|x|}$ est l'**incertitude relative** ou **précision**, exprimée en %.

► Δx comporte <u>au maximum</u> deux chiffres significatifs (un seul peut suffire), et le nombre de décimales de x et Δx est nécessairement le même.

► l'augmentation du nombre de mesures peut réduire l'incertitude de type A associée à la manipulation (subjectivité de l'évaluation de la netteté d'une image, repérage d'un changement de couleur, erreur de chronométrage, etc.) ; mais cette réduction est évidemment limitée par l'existence de l'incertitude de type B liée à la résolution des instruments de mesure.

Remarques importantes

► Il faut être bien convaincu que **toute mesure expérimentale doit être fournie avec un intervalle de confiance** = intervalle de valeurs dans lequel on a p% de chances de trouver la valeur vraie.

► Même si vous n'avez pas le temps de mener un calcul d'incertitude au complet, vous devez **TOUJOURS** :

∘ *réfléchir aux causes d'erreurs* intervenant dans vos mesurages, et évaluer leur ordre de grandeur

∘ *limiter les chiffres significatifs de vos résultats numériques* à un nombre raisonnable, compte tenu de la précision de vos évaluations.

► « Les termes de type B sont habituellement négligeables en biologie, et on peut se contenter d'une analyse de type A ».

► « Le message sur les calculs d'incertitude tient en deux mots : "faire simple". On ne fait pas de la métrologie très approfondie. [...] En général, il y a une source d'erreur principale, et on peut donc la plupart du temps ne garder qu'un seul terme dans les calculs d'incertitude, éventuellement deux ».

(Citations de M. Billy, IG de physique)

Approximations effectuées

Les évaluations et calculs d'incertitudes proposés ci-après reposent sur de nombreuses approximations ou hypothèses, parmi lesquelles on peut citer :

► erreur systématique supposée inexistante ou corrigée

► différentes sources d'erreurs supposées indépendantes (calcul nettement plus compliqué dans le cas contraire)

► obtention de $u(x)$ de type B :

∘ la division par $\sqrt{3}$ suppose une loi de probabilité rectangulaire (ou uniforme) entre $x-e$ et $x+e$: la valeur vraie peut se trouver avec une égale probabilité n'importe où dans l'intervalle $[-e;e]$

∘ la division par $\sqrt{6}$ est choisie si on peut supposer que la loi de probabilité est triangulaire : maximum de probabilité autour de la mesure, évolution affine de part et d'autre

∘ la division par 3 correspond à une loi normale (ou gaussienne) : maximum de probabilité autour de la mesure, courbe "en cloche".

En pratique, en l'absence de précisions complémentaires, on divise la résolution par $\sqrt{3}$, ce qui permet de majorer $u(x)$.

► facteur d'élargissement $k=2$:

∘ pour une évaluation de type B, cela suppose une distribution des erreurs gaussienne

∘ pour une évaluation de type A, cela suppose que le nombre de mesures soit suffisant. Pour n mesures, on a en effet :

n	2	3	4	5	10	15	100	∞
k	12,7	4,30	3,18	2,78	2,26	2,09	1,98	1,96

Dans le cas où on dispose de peu de mesures, il faut donc choisir un facteur d'élargissement adapté.

Je dispose d'une **mesure unique de** x, notée x_{exp}
Je souhaite évaluer l'incertitude de mesure Δx

(cas le plus fréquent en TP)

Je détermine l'*erreur maximale* e_1 liée à la résolution de l'appareil de mesure

- ⋆ $\frac{1}{2}$ graduation (banc d'optique, burette…)
- ⋆ % lecture + nUL avec UL l'unité de lecture ou digit (appareil numérique, à voir selon notice)
- ⋆ $C\%\times$calibre (appareil analogique, si la classe C est indiquée)

J'en déduis l'**incertitude-type** $u_1(x)$:

$$u_1(x) = \frac{e_1}{\sqrt{3}}$$

J'estime l'*erreur maximale* e_2 liée à mon appréciation du phénomène étudié

Si je dois par exemple apprécier la netteté d'une image sur un banc d'optique, je repère les valeurs extrêmes de x pour lesquelles je peux assurer que l'image n'est plus nette, et je prends pour e_2 est la moitié de l'intervalle obtenu.

J'en déduis l'**incertitude-type** $u_2(x)$:

$$u_2(x) = \frac{e_2}{\sqrt{3}}$$

Ce coefficient est lié à l'hypothèse d'une loi de répartition dite « rectangulaire » :
on considère que les mesures relevées sont équiprobables dans l'intervalle $\pm e_i$, et on utilise pour u_i l'écart-type sur cet intervalle.

Si je repère d'autres causes d'erreur, j'estime e_3, e_4… puis calcule u_3, u_4… de façon analogue.

Je calcule l'**incertitude-type composée** :

$$u(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i(x))^2}$$

Il y a souvent *une cause d'erreur principale* : si je l'identifie, je peux négliger les autres et **simplifier** l'expression de $u(x)$ en conséquence.

J'en déduis l'**incertitude-élargie** :

$$\Delta x = 2u(x)$$

Le coefficient (facteur d'élargissement) 2 correspond à un **niveau de confiance de 95%** : on a seulement 5% de risque que la valeur vraie de x soit en dehors de l'intervalle déterminé.

Je dispose de plusieurs mesures x_i, dont la moyenne est $\overline{x}$
Je souhaite évaluer l'incertitude de mesure Δx

(cas fréquent en TIPE)

Je détermine l'*erreur maximale e_1* liée à la résolution de l'appareil de mesure

- ⋆ $\frac{1}{2}$ graduation (banc d'optique, burette…)
- ⋆ % lecture + nUL avec UL l'unité de lecture ou digit (appareil numérique, à voir selon notice)
- ⋆ $C\%\times$calibre (appareil analogique, si la classe C est indiquée)

J'en déduis l'**incertitude-type** $u_1(x)$:

$$u_1(x) = \frac{e_1}{\sqrt{3}}$$

(hypothèse d'une loi de répartition rectangulaire)

Je calcule l'**incertitude-type** $u_2(x)$ associée à la répétabilité à partir des n mesures :

$$u_2(x) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - x)^2}{n(n-1)}}$$

Il s'agit de l'*erreur standard à la moyenne* (la distribution de l'ensemble des moyennes est bien moins dispersée que l'ensemble des mesures).

Si je repère d'autres causes d'erreur, j'estime e_3, e_4… puis calcule u_3, u_4… de façon analogue.

Je calcule l'**incertitude-type composée** :

$$u(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i(x))^2}$$

Il y a souvent *une cause d'erreur principale* : si je l'identifie, je peux négliger les autres et **simplifier** l'expression de $u(x)$ en conséquence.

J'en déduis l'**incertitude-élargie** :

$$\Delta x = 2u(x)$$

Le coefficient (facteur d'élargissement) 2 correspond à un **niveau de confiance de 95%** : on a seulement 5% de risque que la valeur vraie de x soit en dehors de l'intervalle déterminé.

Je souhaite évaluer l'incertitude sur
une **mesure indirecte** $y = f(y_1, y_2 \ldots)$

↓

J'évalue l'incertitude-type sur chaque grandeur y_i, selon les méthodes précédentes

↓

Je calcule l'**incertitude-type** sur y à l'aide de la *formule de propagation* :

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[u(y_i) \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) \right]^2}$$

ou encore :

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[u(y_i) \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y_i} \right) \right]^2}$$

En particulier :

⋆ si $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $u(y) = \sqrt{\alpha^2 u^2(y_1) + \beta^2 u^2(y_2)}$

⋆ si $y = y_1^{\alpha} y_2^{\beta}$, $\dfrac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\left(\alpha \dfrac{u(y_1)}{y_1}\right)^2 + \left(\beta \dfrac{u(y_2)}{y_2}\right)^2}$

S'il y a une *mesure nettement plus incertaine que les autres*, je peux négliger les termes associés à ces dernières et **simplifier** l'expression de $u(y)$ en conséquence.

↓

J'en déduis l'**incertitude-élargie** :

$$\Delta y = 2u(y)$$

Le coefficient (facteur d'élargissement) 2 correspond à un **niveau de confiance de 95%** : on a seulement 5% de risque que la valeur vraie de y soit en dehors de l'intervalle déterminé.

La démarche de recherche des causes d'erreurs

Les « cinq M »